Для семинара №4,5.

Непрерывные отображения. Аксиомы отделимости. Лемма Урысона и теорема Брауэра-Титце-Урысона о продолжении функции.

Лемма Урысона. *Для каждой пары A, B непересекающихся замкнутых множеств нормального пространства X существует непрерывная функция $f\colon X \to I$, такая, что*

$$f(x) = 0 \text{ при } x \in A \text{ и } f(x) = 1 \text{ при } x \in B.$$

Теорема Брауэра-Титце-Урысона. *Каждая непрерывная функция, заданная на замкнутом подпространстве некоторого нормального пространства X, со значениями в I или $\mathbb{R}$ непрерывно продолжается на X.*

1. Доказать, что для непрерывных отображений $f, g\colon X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y множество точек совпадения $\{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

2. (Теорема о замкнутом графике.) Если отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно и Y хаусдорфово, то график отображения замкнут.

3. Докажите, что если график отображения $f\colon X \to Y$ замкнут и Y компактно, то отображение непрерывно.

4. Докажите, что сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. Таким образом, метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности ТиТТК оно сепарабельно.

5. Метрическое пространство нормально.

6. Всякое замкнутое множество метрического пространства R может быть представлено в виде $\{x : f(x) = 0\}$, где f – непрерывная во всех точках R действительная функция.

7. «Стрелка» является нормальным пространством?

8. Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подмножество, мощности континуум, то оно не нормально.

9. Квадрат «стрелки» и плоскость Немыцкого не являются нормальными пространствами.

10. Каждая непрерывная действительная функция на счётно компактном пространстве ограничена.

11. Нормальное пространство, на котором всякая непрерывная функция ограничена, является счётно компактным.